GPS/GNSS og trilateration

Allan Aasbjerg Nielsen

Danmarks Tekniske Universitet

DTU Space – National Space Institute

aa@space.dtu.dk

Kortdage, Herning, 1. nov. 2012

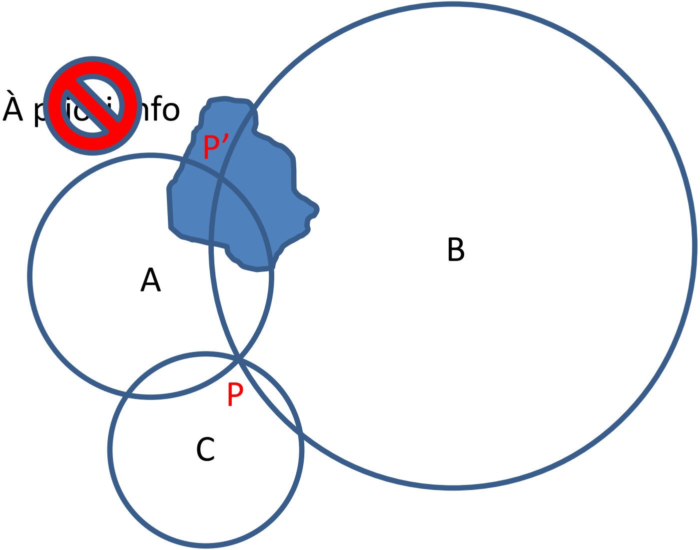
GPS/GNSS

- GPS, egl. ”NAVSTAR Global Positioning System”
- GNSS, mere generisk ”Global Navigation Satellite System”, inkluderer GPS, Glonass, Galileo, Compass, ...
- Tycho Brahe 1546-1601, Johannes Kepler 1571-1630
- Per Høegs (DTU Space) *slides*, pp. 5, 8-12, 14-16
- For at illustrere trilaterationen (multilaterationen) og gøre det lidt let arbejder vi i 2-D og fastfryser tiden

Trilateration

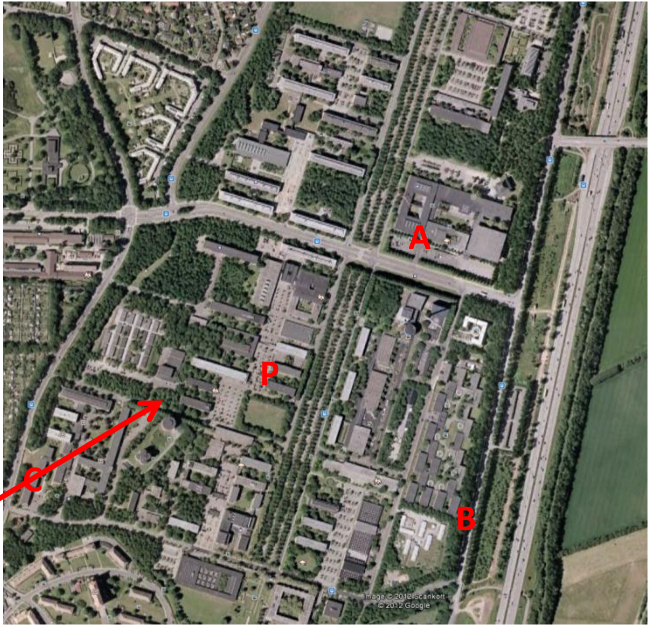
”Tre sider”

Geometrisk sted



DTU

- Start GE, brug UTM-koord.
- Mål 2-D afstande
  - A: 101
  - B: Kampsax
  - C: Demant
  - P: 321
- DTU Space



GE, UTM-koordinater, afstande

- UTM, Universal Transverse Mercator (Northing, Easting), lokalt, vælg under ”Funktioner | Indstillinger | 3-D visning”
- Vælg let identificerbare punkter (f.eks. hjørner af bygninger), brug evt. GEs stedsmarkør, koordinater aflæses nederst i vinduet, notér koordinater
- Afstande måles med GEs ”Vis lineal”, notér afstande
- Brug ikke for lange afstande (for så bliver afstande målt i UTM-koordinater upræcise)

Trilateration

- Vi foregiver, at punkt P har ukendte koordinater
- Udfør trilateration (kommer) og sammenligner den beregnede koordinat for P med den aflæste
- A (x_A, y_A)
  B (x_B, y_B)
  C (x_C, y_C)
  P (x, y)

Trilateration

$$d_A^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 =$$
$$x^2 + x_A^2 - 2x_A x + y^2 + y_A^2 - 2y_A y$$

$$d_B^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 =$$
$$x^2 + x_B^2 - 2x_B x + y^2 + y_B^2 - 2y_B y$$

$$d_C^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 =$$
$$x^2 + x_C^2 - 2x_C x + y^2 + y_C^2 - 2y_C y$$

Trilateration

- Eliminér x^2 og y^2 : træk ligning 2 fra ligning 1, og 3 fra 1

$$d_A^2 - d_B^2 = x_A^2 - x_B^2 - 2(x_A - x_B)x \\ + y_A^2 - y_B^2 - 2(y_A - y_B)y$$

$$d_A^2 - d_C^2 = x_A^2 - x_C^2 - 2(x_A - x_C)x \\ + y_A^2 - y_C^2 - 2(y_A - y_C)y$$

Trilateration

- Eller (to ligninger med to ubekendte)

$$2(x_A - x_B)x + 2(y_A - y_B)y =$$
$$(x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2) - (d_A^2 - d_B^2)$$

$$2(x_A - x_C)x + 2(y_A - y_C)y =$$
$$(x_A^2 + y_A^2) - (x_C^2 + y_C^2) - (d_A^2 - d_C^2)$$

Trilateration

- Vi kunne have dannet én ligning mere: træk ligning 3 fra ligning 2

$$
d_B^2 - d_C^2 = x_B^2 - x_C^2 - 2(x_B - x_C)x \\
+ y_B^2 - y_C^2 - 2(y_B - y_C)y
$$

- Dette ville give tre ligninger med to ubekendte: **Udjævning** (en anvendelse af regressionsanalyse) – inkl. usikkerhed på koordinater

Udjævning

$$2\begin{bmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2) - (d_A^2 - d_B^2) \\ (x_A^2 + y_A^2) - (x_C^2 + y_C^2) - (d_A^2 - d_C^2) \\ (x_B^2 + y_B^2) - (x_C^2 + y_C^2) - (d_B^2 - d_C^2) \end{bmatrix}$$

Udjævning

$$c = Ax + e$$

Mindste kvadrater, minimer:

$$e^T e = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

$$(A^T A)\hat{x} = A^T c, \quad \text{formelt:} \quad \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T c$$

Varians-kovariansmatrix: $s^2 (A^T A)^{-1}$

$$s^2 = \hat{e}^T \hat{e}/f, \quad \hat{e} = c - A\hat{x}$$

Udjævning, Matlab-kode

```
% Tal fra GE, DTU, enhed [m]

xA = 344657.37; yA = 6185059.39; % 101
xB = 344767.80; yB = 6184541.63; % Kampsax
xC = 343995.37; yC = 6184663.06; % Demant
xP = 344471.75; yP = 6184793.13; % 321

dA = 325.30;
dB = 387.98;
dC = 493.84;

% % To ligninger
% A = 2*[xA-xB yA-yB; xA-xC yA-yC];
% c = [(xA^2+yA^2)-(xB^2+yB^2)-(dA^2-dB^2) ...
%        (xA^2+yA^2)-(xC^2+yC^2)-(dA^2-dC^2)]';
```

Udjævning, Matlab-kode

```
% Tre ligninger
A = 2*[xA-xB yA-yB; xA-xC yA-yC; xB-xC yB-yC];
c = [(xA^2+yA^2)-(xB^2+yB^2)-(dA^2-dB^2) ...
     (xA^2+yA^2)-(xC^2+yC^2)-(dA^2-dC^2) ...
     (xB^2+yB^2)-(xC^2+yC^2)-(dB^2-dC^2)]';

[n p] = size(A);
x = A\c % formelt x = inv(A'*A)*A'*c
x(1) - xP
x(2) - yP
e = c - A*x;
f = n - p;
if f>0
    s2 = (e'*e)/f;
    rmse = sqrt(s2)
    Qx = s2*inv(A'*A);
    xstd = sqrt(diag(Qx))
end
```

Udjævning, resultater

```
x =
          344471.88
         6184792.35

ans =
         0.13

ans =
        -0.78

rmse =
     2.19e-006


xstd =
     1.08e-009
     1.67e-009
```

Konklusion

- Satellitbaseret positionering (GPS/GNSS) princip
- Arbejd i 2-D (i stedet for 3-D) og ignorer tidsaspektet
- Brug GE og UTM-koordinater
- Trilateration: simpel geometri (Pythagoras) løser problemet
- Bibringer de studerende meget konkret forståelse for koordinatbestemmelsen
- Spring evt. udjævningen over